**Основная часть.**

1. Программа для моделирования функции распределения Колмогорова.

Функция распределения Колмогорова или критерий Колмогорова используется для проверки гипотез о принадлежности уже известному закону распределения. Статистика Колмогорова или информация выражается в виде наибольшей разности двух функций распределения:

*Dn = sup |Fn(x) – F(x)|*

*Fn(x)*–эмпирическая функция распределения;

*F(x)*–некая «истинная» функция распределения;

Многомерное нормальное распределение *X = (X1,…, Xp)* описывается вектором математических ожиданий *μ = ( μ1,…, μp)* и положительно определенной ковариационной матрицей

*Λ = ||δi,j|| ὶ,j = 1,…,p,*

где

*δi,j = Сov(Xi, Xj) = Λ, ὶ, j = 1,…,p*

ковариация случайных величин *Xi* и *Xj*.

«Теорема. Если X из нормального распределения, то его квадратичная форма Y2 имеет хи-квадрат распределение с p степенями свободы.»

Все имеется для того, чтобы смоделировать многомерное распределение хи-квадрат из многомерного нормального распределения с данными параметрами, то есть, ковариационной матрицей *∑* и вектором математических ожиданий *μ*, а *p*-размерность нормального вектора и также размерность ковариационной матрицы и размерность нормального распределения, степени свободы распределения хи-квадрат. Матрицу ковариаций будем искать в виде:

*Λ = AAT*

*X = Aɳ + μ*

*ɳ = (ɳ1,…,ɳp)*

Линейное преобразование вектора *ɳ*, для моделирования *X*, где компоненты вектора нормальные распределенные случайные величины с параметрами дисперсии, равной единицы, и математическим ожиданием, равным нулю. Оценка ковариационной матрицы:

*∑ = 1/(1 - p)ATA*

Исходя из этого будет моделироваться квадратичная форма, которая будет иметь вид:



«Истинное» распределение хи-квадрат известно.

Рис. 1. Функции плотности



*Fn = Y2*



где Γ и γ обозначают соответственно полную и неполную гамма-функции,

*k*-степень свободы.

Рис. 2. *Dn*-статистика Колмогорова



Красным выделена статистика колмогорова.

2. Действительно ли, что распределение колмогорова имеет распределение колмогорова?

Исходя из теоремы, степени свободы *p* будут определять верно ли получилось смоделировать статистику колмогорова. Для того чтобы найти, надо лишь изменять степени свободы и проверять, при каких *p* статистика *Dn* будет достигать оптимальных значений (т.е. зафиксируем *p* у смоделированной квадратичной формы и будем изменять *p* у «истинного» распределения, при этом будем фиксировать минимум *Dn*), при достижении оптимальных значений степени свободы будут принимать значения согласно с теоремой.

Рис. 3. Достижение минимума статистики *Dn* при *p* = 10 

*Таблица 1*

Оптимальная статистика *Dn* при различных *p*

|  |  |
| --- | --- |
| *Dn* | *p* |
| 0.30750000 | 2 |
| 0.35000000 | 3 |
| 0.33000000 | 4 |
| 0.33428571 | 5 |
| 0.30687500 | 6 |
| 0.24012346 | 7 |
| 0.25000000 | 8 |
| 0.13371901 | 9 |
| 0.17527778 | 10 |
| 0.21473373 | 11 |
| 0.17551020 | 12 |
| 0.09444444 | 13 |
| 0.19859375 | 14 |
| 0.32356401 | 15 |
| 0.27074074 | 16 |
| 0.12177285 | `17 |
| 0.27750000 | 18 |
| 0.13961451 | 19 |
| 0.20942149 | 20 |